



TITLE:

# 層流から乱流への遷移のシミュレーション(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

河村, 哲也

---

CITATION:

河村, 哲也. 層流から乱流への遷移のシミュレーション(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 539: 119-135

ISSUE DATE:

1984-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98728>

RIGHT:

## 層流から乱流への遷移のシミュレーション

東大工学部 河村 哲也 (Tetuya KAWAMURA)

### § 1 はじめに

差分法や有限要素法など、流れの領域を有限個の格子に分割して基礎方程式を解く方法では高レイノルズ数の流れの計算は非常に困難となる。その理由は、ナビエ・ストークス方程式の非線形項が次々に高波数成分をつくり出す一方、レイノルズ数が高いとそれら高波数成分が拡散しにくくなるためだと思われる。すなわち、実用的な格子幅では高波数成分が捕えきれなくなり、それらが Aliasing error をおこし、非線形不安定性となり、通常計算が発散してしまう。したがって安定に計算をすすめるためには、何らかの方法で高波数成分を取り除く必要がある。

著者は以前、3次精度のスキームを開発し、それを用いて円柱まわりの高レイノルズ数流れの計算をおこなった<sup>1)</sup>。このスキームの誤差の主要項には4階微分が含まれており、これが高波数成分を有効に落したために、高レイノルズ数流れの計算が安定に実行できたものと思われる。この円柱まわりの

計算では臨界レイノルズ数前後の流れが一応再現できたように思われる。一方、臨界レイノルズ数付近でおこる境界層の剝離および再付着は流れに乱流を仮定した方が自然である。したがって、このスキームには何らかの形び乱流をシミュレートする能力があるとも考えられるので、本研究では直接乱流のシミュレーションをおこなった。

取り扱った問題は、3次元ダクト内の乱流の問題で2つのケースを考えた：

(1) 発達した乱流のシミュレーション

(2) 層流から乱流への遷移のシミュレーション

(1)のケースは、ラージ・エディ・シミュレーション (LES)<sup>2), 3), 4)</sup>を用いて多くの研究がなされている。一方、(2)についてはおもに計算時間の制約によりあまり研究がなされていないようである。

§2では計算方法の概略をのべる。詳細は文献1に詳しい。§3はケース(1)の結果で、§4はケース(2)の結果である。§5は、議論とまとめである。

## §2 計算方法

基礎方程式は、ナビエ・ストークス方程式(2)と、(2)の両辺の発散をとり、つねに各ステップで連続の式をみたすよ

うに補正を加えた圧力に対するポアソン方程式(1)である。

$$\Delta P = -\operatorname{div}(\mathbf{W} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{W} + \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{W}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + (\mathbf{W} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{W} = -\operatorname{grad} P + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{W}. \quad (2)$$

ここで  $\Delta t$  は (2) を差分化したときの時間まぶみ幅であり、 $Re$  はレイノルズ数である。(1)の右辺第2項は差分近似した場合には0となるとは限らないのでのこしておく。ある時刻で速度場がわかれば、(1)を解いてそのときの圧力分布を求める。そうして得られた圧力とその時の速度を用いて(2)式により速度を時間発展させる。

(1)を解く方法は種々あるが、ここでは最近のベクトル計算機の発達を考慮して、すべて中心差分でおきかえた上で、反復回数は増えるけれども、修正SOR法(ポイントごとではなく一行ずつ最新値におきかえる)を用いた。(2)の差分については、時間微分に対してはオイラー(陽)スキーム、また空間微分に対しては、非線形項を除き、中心差分を用いた。

非線形項の差分は(3)で与えられる3次精度の風上差分を用いた。ここで  $\alpha$  はある定数で、円柱の計算では1.0を用いたが、ここでも1.0を用いた。詳しい導出は文献1にある。

$$\left(f \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = f_{i,j} \frac{-u_{i+2,j} + 8(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + u_{i-2,j}}{12 \Delta x} \\ + \alpha |f_{i,j}| \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{4 \Delta x} \quad (3)$$

境界条件は 両ケースとも壁面上では粘着条件，流れ方向およびスパン方向には周期条件を課した。壁面上での粘着条件を精密なものにするため，壁方向には壁に近づくにつれて細くなる格子を用いた。具体的には Moyn & Kim<sup>3)</sup> に従って次式により座標変換をおこなった：

$$\begin{cases} y_j = \frac{1}{2} \tanh [\xi_j \operatorname{artanh} \alpha] + 0.5 \\ \xi_j = -1 + 2(j-1)/(N-1) \quad (j=1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (4)$$

ここで  $\alpha$  は壁付近での格子の集中度をコントロールする定数であるが問題により 0.95 ~ 0.98 の間の数を用いた。

格子点は壁面上にくるようにし，またすべての物理量は同一の格子点で評価した。(regular mesh) (1)を解く場合，壁面上での圧力が必要となるが，レイノルズ数が高いと考え，

$\partial p / \partial n = 0$  より求めた。また (2) の非線形項を (3) で近似する場合，壁の外側に 1 つ仮想点が必要となるが，その点での速度は単純に reflection の条件より決めた。

### §3 発達した乱流のシミュレーション

この問題は Deardorff<sup>2)</sup> により初めて取り扱われ、以後 LES の標準的な問題になっている。図1に本文で用いた記号を示す。初期条件としては、Laufer<sup>5)</sup>の実験の平均速度分布に、一様乱数を用いて発生させた攪乱を重ね合わせたものを用い、境界条件としては、前述のとおり流れ方向、スパン方向に周期条件、壁では粘着条件を用いた。以上の初期・境界条件のもとで (1), (2) と (3), (4) を用いて積分する。用いた格子数は、流れ(x)方向31, スパン(z)方向31, 壁(y)方向21 である。ただし (4) の  $\alpha$  は 0.95 とした。このときの格子幅を図2に示す。また  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta z = 0.033$  で 最大平均速度を 1, 壁間距離を 1 としたとき  $\Delta t = 0.02$ ,  $Re = 20000$  である。

一様乱数を用いてつくった初期条件ではもちろん連続の式は満足しないため、流れの様子は時間的にかなり変化する。おおよしの傾向は、まず乱れが小さくなり平均速度分布もポアズイユ流に徐々に近づくが、ある程度時間がたつ ( $T=80$ ) と乱れが大きくなり おおよし  $T=120\sim 160$  程度で平均速度分布の形は変化しなくなるようである。

図3, 図4, 図5にそれぞれ平均速度プロファイル  $\bar{u}$ , レイノルズストレス  $\langle u'v' \rangle$  および 乱れの強さ  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle v'^2 \rangle$ ,  $\langle w'^2 \rangle$  を示す。平均のとり方は、周期条件を課して

いるため、時間平均と空間平均が大差が有りと考えて、壁に平行な面について面平均をとっている。ただし分布が非対称なので、この平均のとり方は不十分だと思われる。Moin等は面平均をとった上で、十分長い時間平均をとっている。

各図において点線は Laufer の実験結果を示す。平均速度分布については、計算結果は実験結果に比べて中心部付近で平坦になりすぎる傾向がある。乱れの強さについては流れ方向とスパン方向 ( $u$ と $w$ ) については実験と定性的な一致は良好であるが、壁方向 ( $v$ ) については差違が見られる。すなわち、計算結果は実験結果ほど壁付近の立ち上がりがよくない。このことは LES を用いた Moin 等の計算においても見られる。

図6は、上から順に流れ方向、スパン方向、壁方向の変動速度および圧力の変動成分の等高線を、左から順に、壁に垂直で流れ方向に切った面、壁に垂直でスパン方向に切った面および壁に平行で下から  $y=0.5$  で切った面について図示したものである。

図7(a)は、上下壁をつなぐ線上からマーカー粒子を、ある時間ステップごとに放出させ、その後の流跡を追跡したものであり、同様に図7(b)は、壁に平行に流れに垂直に張った線から放出させたマーカーの流跡である。図7(a)には乱流の大

規模構造が見られる。また図7(b)は、壁からの距離を変えたものが示してあるが、壁近くでは流れに平均的に速度の遅い部分と速い部分が交互に生じ、流跡はスパン方向に波打っているのかわかる。

#### §4 層流から乱流への遷移のシミュレーション

層流から乱流への遷移を直接に数値シミュレーションで取り扱った例はほとんどない。それは、このシミュレーションは理想的には、十分に長い領域を用意して、初期には流れが静止していて、乱れもない状態から出発して全体に乱れるまで計算を行なうのがよいからである。もちろん初期の乱れが小さければ小さいほど遷移までの時間は長くなる。一方、§3でのべたように初期条件が連続の式をみたさない場合、一度乱れが弱くなってからもう一度強くなる。この現象はある程度、遷移過程を表わしているとも考えられる。

ここでは、まず初期速度分布としてポアズイユ流をとり、乱れは加えずに計算を行なった。境界条件は§3と同じである。流れ方向に周期性を課すのは問題であるが、計算領域を小さくするためである。格子数は、流れ方向に25、スパン方向に15、壁方向に21である。(4)の $\alpha$ はこの場合も0.95、 $\Delta x = 0.125$ 、 $\Delta z = 0.05$ 、 $\Delta t = 0.02$ 、 $Re = 20000$ である。



図8は各時刻での計算結果で、左欄は速度のスパン方向の平均値を流れ方向の各場所で描いたもので、右欄は、左欄の各時刻に対応する乱れの強さ(壁に平行な面での平均値)である。この図より明らかのように、乱れは、始めは中心近くでおこり、次いで全体に大きく乱れてから、Lauterの実験のような乱れの分布に近づく。また、乱れはいめのポアズイユ型の速度分布から、発達した乱流の平坦な速度分布への移行はかなり急激におこることがわかる。図9は、壁に平行な面平均の速度分布を4つの異なる時間について重ねて描いた図である。

管内流の乱流への遷移は、流れがポアズイユ流になる前におこる可能性があるわけで、その意味で静止状態から出発した流れの遷移のシミュレーションは興味深い。計算時間や記憶容量の関係で流れ方向に十分な長さをもった領域を取り扱うことができないので、ここでもポアズイユ流の場合と同じように流れ方向に周期条件を課して、領域を小さくした。初期条件はすべての速度成分を0とし、流れ方向に圧力差だけをかけた。格子数や格子間隔、 $\Delta t$ や $Re$ は上記ポアズイユ流の場合と同じである。

図10(a)は、壁に平行な面での平均をとった速度が各時刻について描かれている。レイノルズ数が高いため、流れが

ポアズイユ流に近づくまでに非常に時間がかかっている。しかし、完全にポアズイユ流になる前 ( $T=560$ ) に乱れはじめて、比較的短時間で、いわゆる乱流の速度分布 ( $T=680$ ) になる。 $T=560$  と  $T=680$  の間をもう少し詳しく図示したのが図10(b)である。(T=15 間隔で、原点まですらして描いてある) 図より明らかのように、 $T=620$  付近で目にみえる非対称性が現われ、かなり急激に乱流へ移行してしまう ( $T=650$ )。

図11には、遷移後十分に乱流が発達した以後での、速度分布の時間・空間平均である。この場合、§3 でみられた中心付近で平坦になりすぎる傾向が改善され、実験値との一致は良好であることが注目される。

図12は、図7に対応するもので、ムーカ-粒子を発生させる時刻は、流れがちょっと乱れたと思われる時刻 ( $T=635$ ) をとっている。図12(a)は、図7(a)に比べてより明確に乱流の大規模構造を捕えていると思われる、また図12(b)は図7(b)に比べ、より乱れが大きくなっていることを示している。

### §5 議論とまとめ

以上のようにこのスキームは乱流に対して意外により結果を与える。このスキームの最大の特徴は高波数成分を4階微分の項で取り除こうとしたところにある。すなわち、(3)の

右辺の各項を Taylor 展開するとそれぞれ次のようになる:

$$\text{第1項} = f \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^4), \quad (5)$$

$$\text{第2項} = \alpha \Delta x^3 \left[ f \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta x^5) \right]. \quad (6)$$

したがって、このスキームの精度は  $\Delta x^3$  であり、その係数に 4 階微分を含んでいることになる。

乱流のシミュレーションに対するこのスキームの働きについては次の2とおり解釈が可能である: ひとつは、乱流の主要な量は、乱流の大規模構造で占まり、それらを捕えるためには粗い格子で十分であり、細かい量については乱流モデルは必要でなく、単に高波数成分が低波数成分に影響を与えないようにうまく取り除けばよいということであり、もうひとつの解釈としては (6) が良い乱流モデルになっていると考え、さらに近似を良くするためには (6) の  $\alpha$  を (この計算では 1.0 としたが) 場所の関数と考え、いろいろと変化させるという考え方である。

このスキームは 5 点を使って 3 次精度なので任意性が残る。具体的には (6) の  $\alpha$  を変化させることにより、精度は同じ種々の公式が与える。(  $\alpha=0.0$  の場合のみ 4 次精度となりひとつおりに決まる。)  $\alpha$  の最適値を決定するためには、 $\alpha$  を種々

に変化させて数値実験するか、あるいは適当な乱流モデルを構成して変動量が4階の拡散の働きをもつことを示した上で理論的に $\alpha$ の値を推定するかであるが、いずれにせよ今後の課題である。ただし、誤差が $\Delta x^3$ に比例して小さくなるため格子幅を細かくすればするほど解はナビエ・ストークス方程式の解に近づくことが期待される。

この研究では、3次精度のスキームを用いる次元ダクト内の、十分発達した乱流および層流から乱流への遷移のシミュレーションをおこなった。発達した乱流のシミュレーションではLESを用いた計算に近い良い結果を(比較的小数の格子で)得ることができた。また静止状態から出発して乱流に至る過程を数値的に再現することができた。

本研究は、文部省科研費“乱流現象の解明と制御”により東大物理工学科に購入したMELCOM 70/150 ミニコンピュータを用いて行なった。静止状態から乱流への遷移の問題の計算時間は1ケース120時間程度であった。

### <参考文献>

- 1) 河村・高見：数理解析研究所講究録 510 (1984)
- 2) J.W. Deardorff: J. Fluid Mech. vol. 41 pp 453-480 (1970)
- 3) P. Moin & J. Kim: J. Fluid Mech. vol. 118 pp. 341-377 (1982)

4) 堀内 潔 : 博士論文 東京大学 物理工学科 (1982)

5) J. Laufer : NACA TN 2123 (1950)

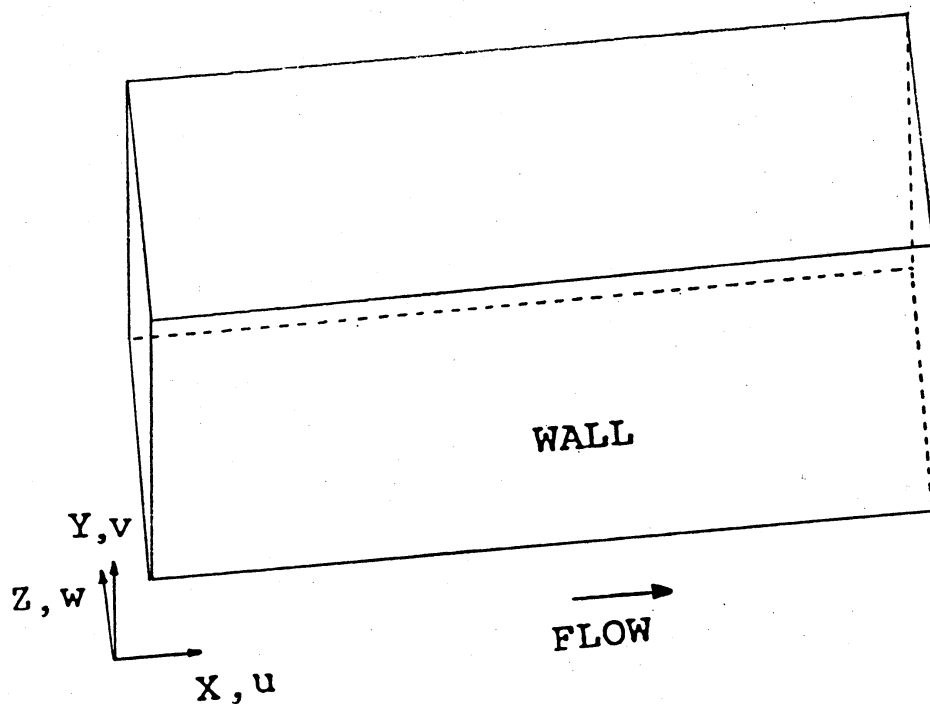


図 1 計算に用いた座標及び速度の定義

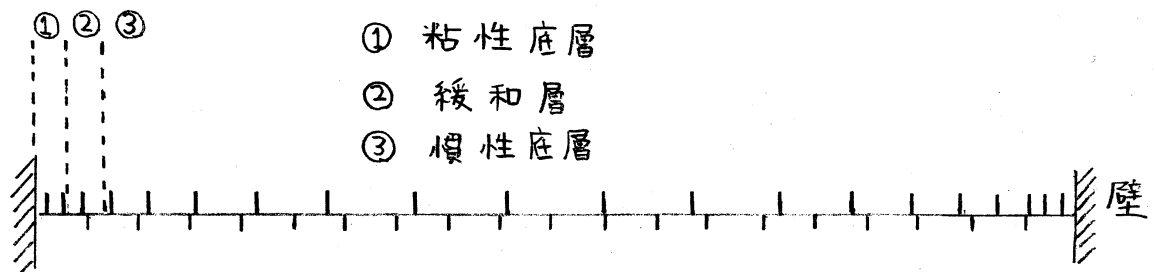


図 2 計算に用いた格子と等間隔格子の比較

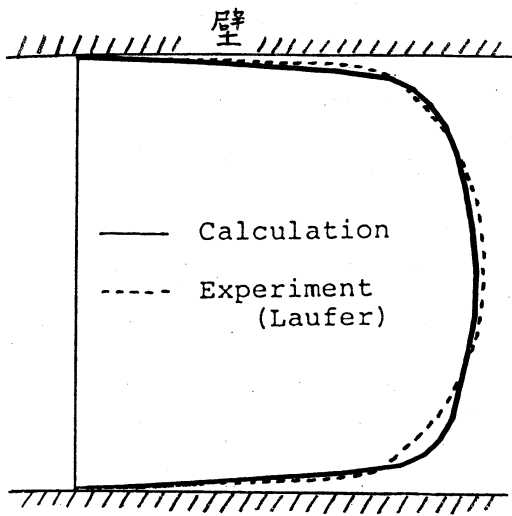


図 3 平均速度分布  $\bar{u}$

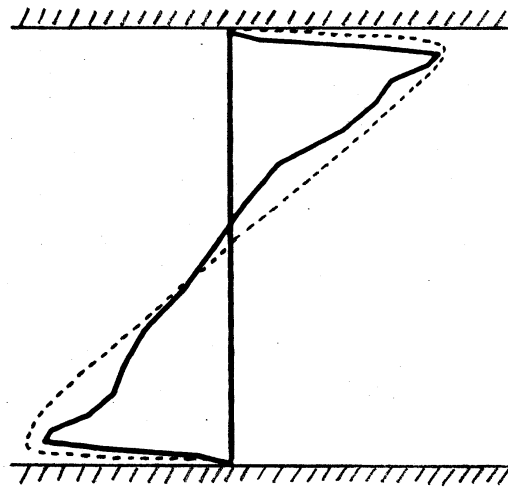


図 4 レイノルズストレス  $\langle u'v' \rangle$

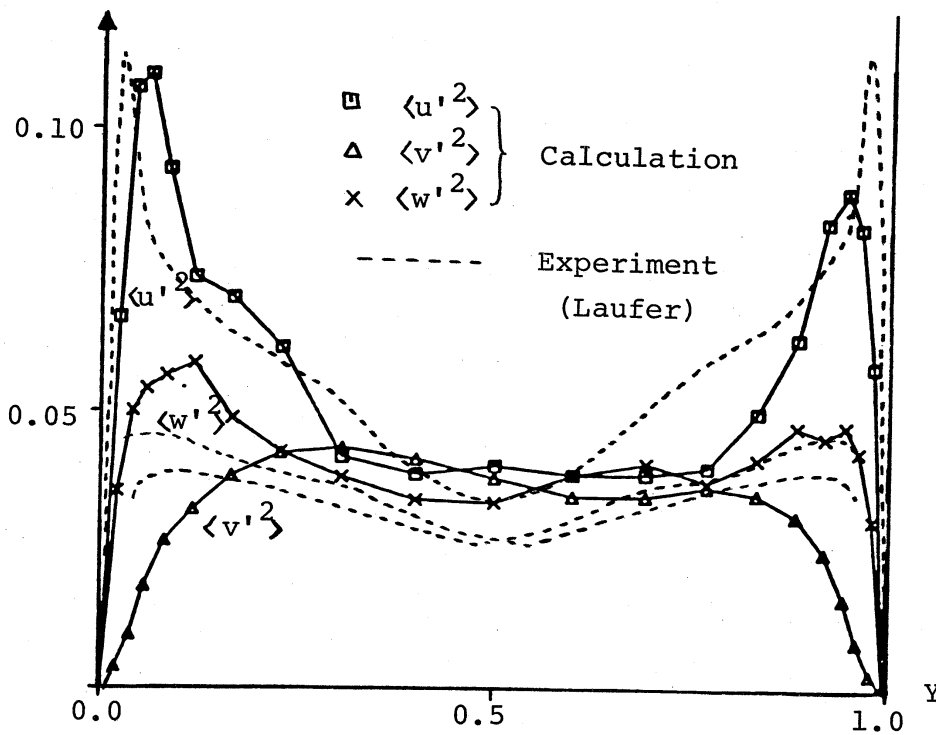


図 5 乱れの強さ

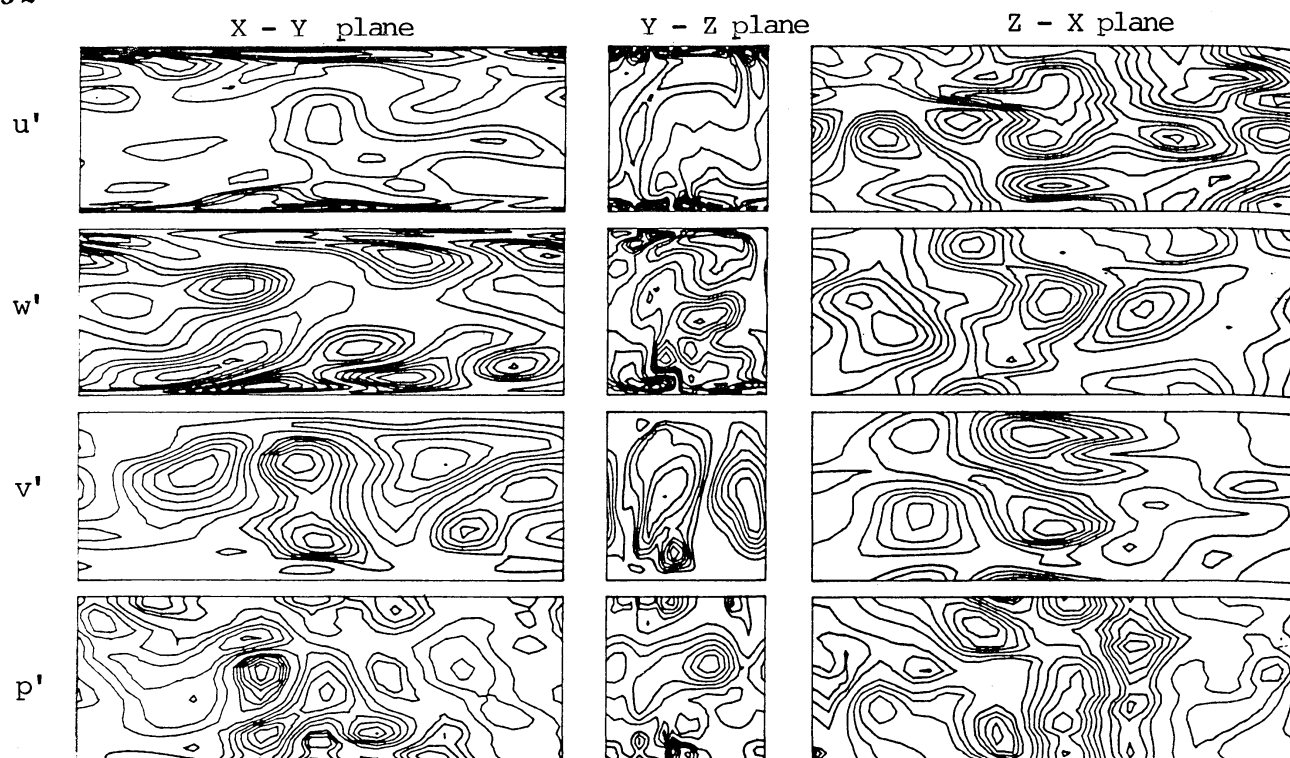
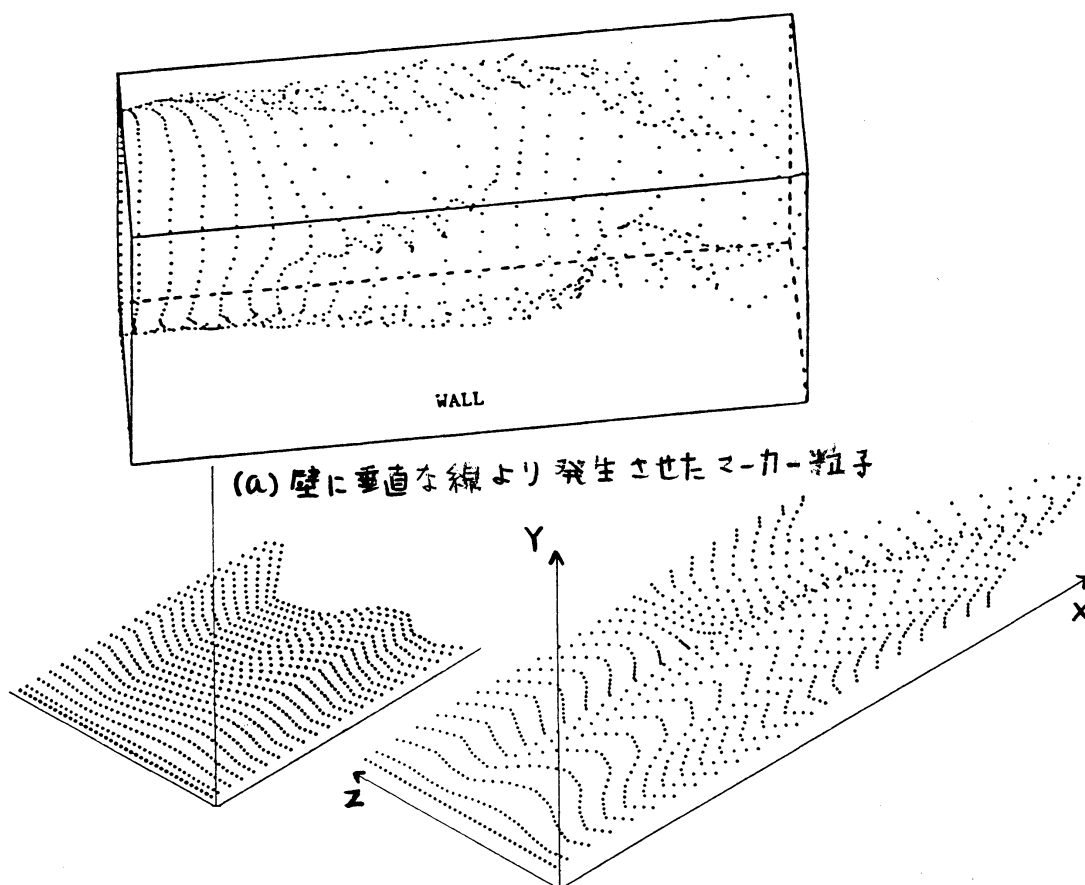


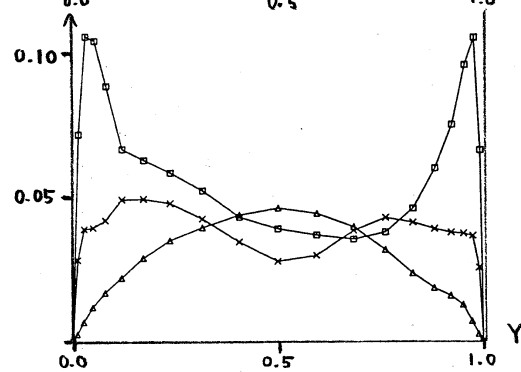
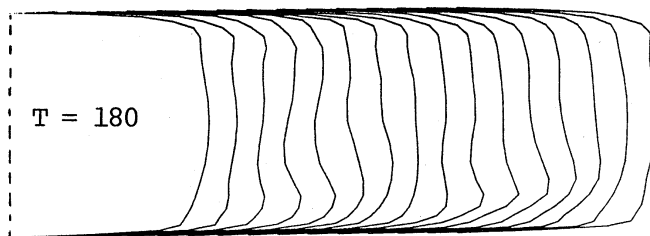
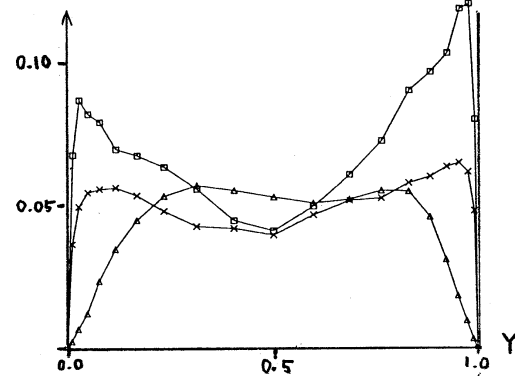
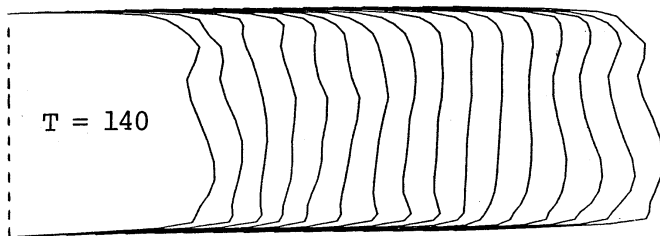
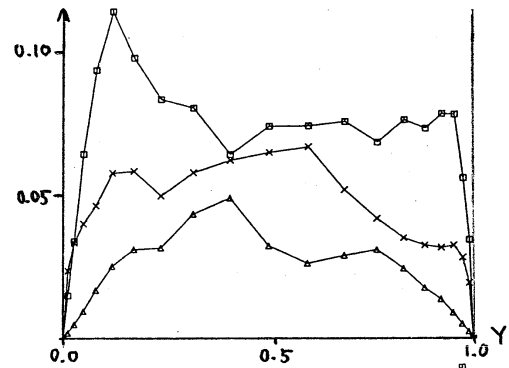
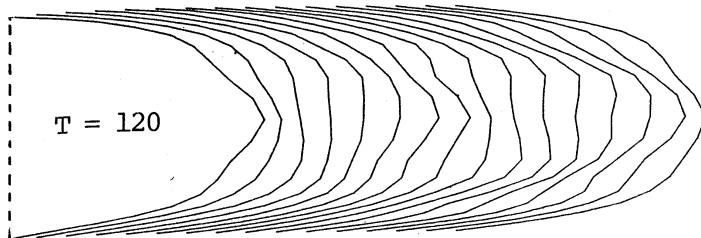
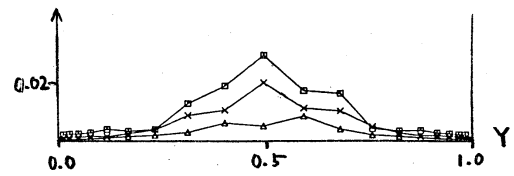
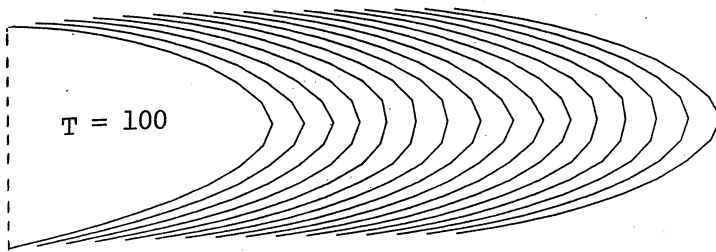
図 6 変動成分の等高線



(a) 壁に垂直な線より発生させたマーカー粒子

(b) 壁に平行な線より発生させたマーカー粒子

図 7 マーカー粒子による流れの可視化



(a)

(b)

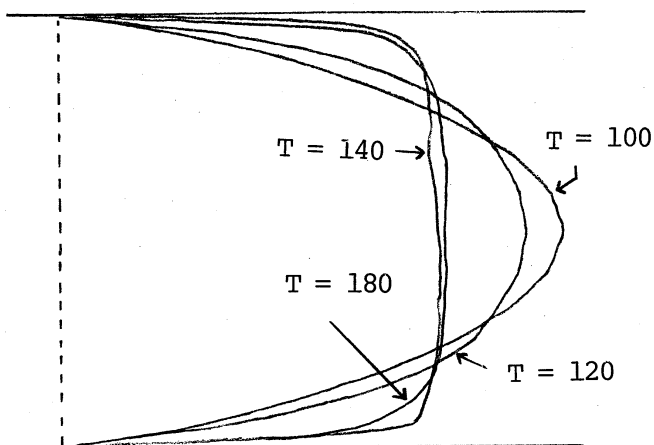
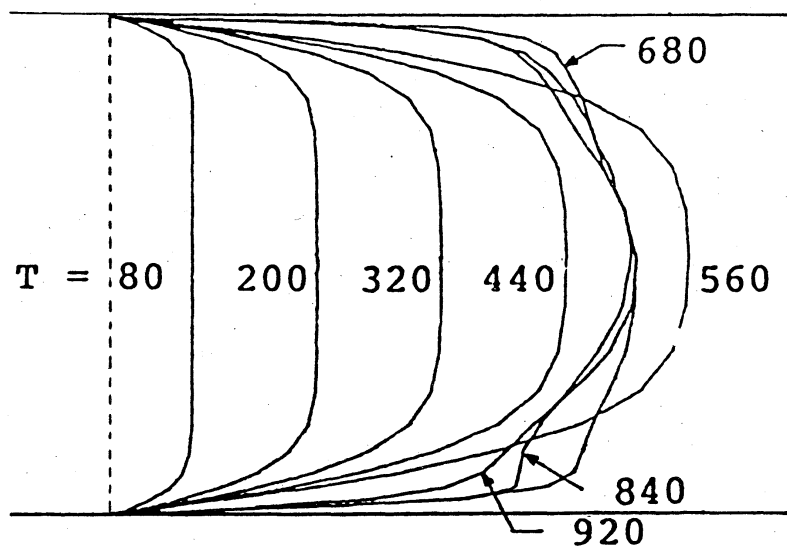


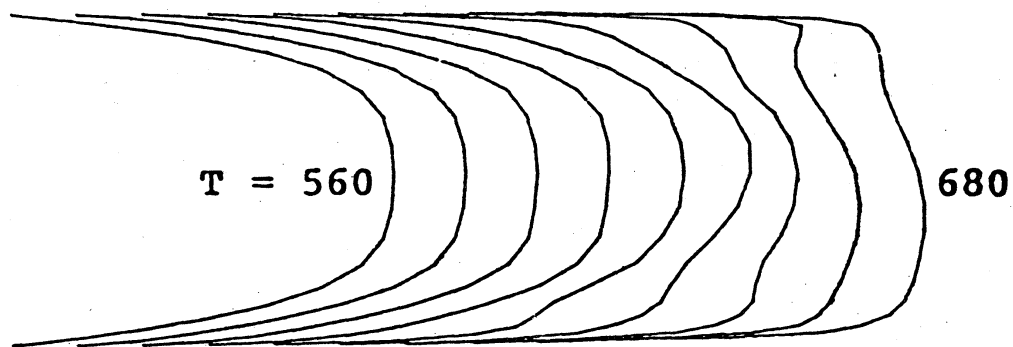
図 8 (上) (a) スパン(Y)方向  
平均の各時刻での速度分布。  
(b) 各時刻での乱れの強さ。

図 9 (左) ホアズユ流の  
層流から乱流への遷移。  
(壁に平行な面平均の速度分布)





(a)



(b)

図10 (a) 静止状態から乱流への遷移。

(b)  $T=560 \sim 680$  間を  $T=15$  おきに描いた図

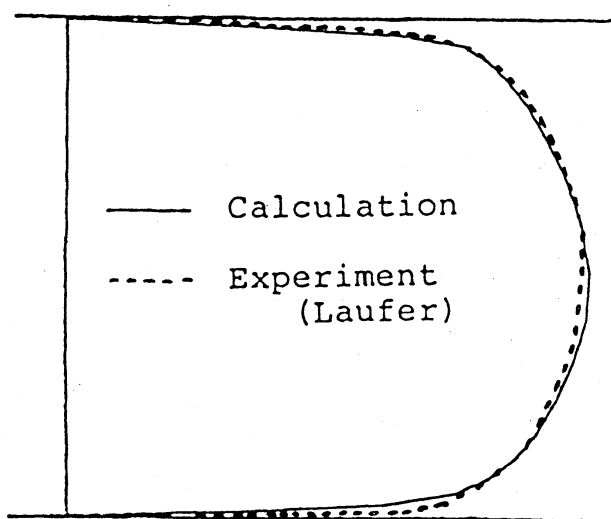
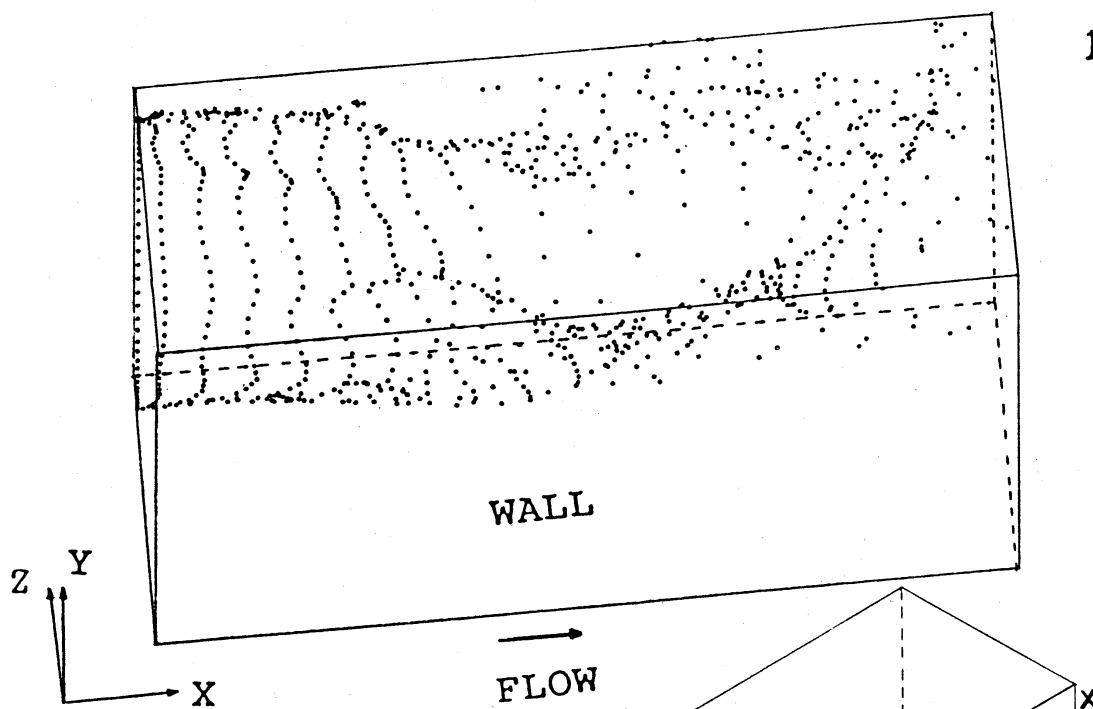
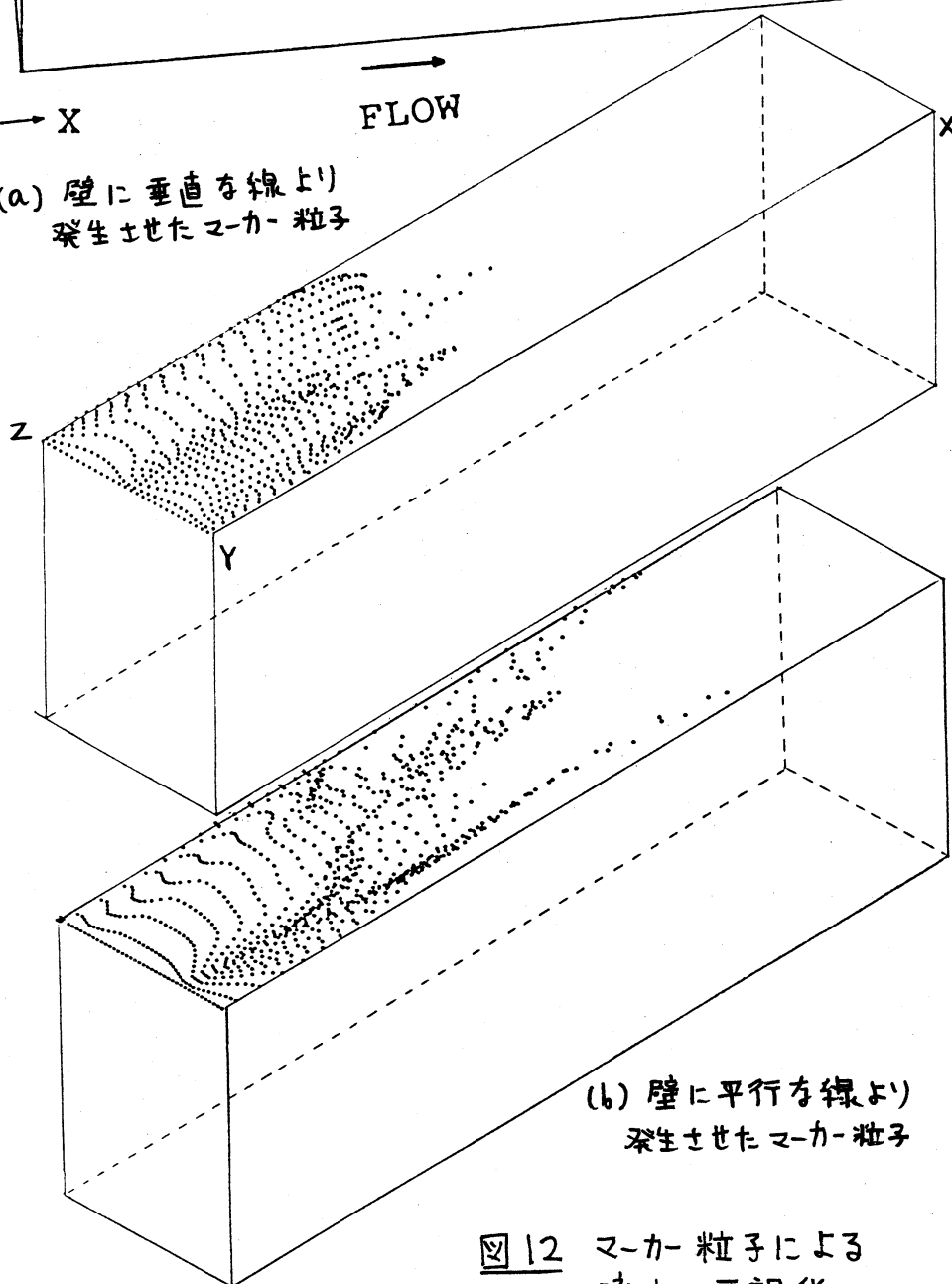


図11 遷移後の時間及面平均の速度分布



(a) 壁に垂直な線より  
発生させたマーカー粒子



(b) 壁に平行な線より  
発生させたマーカー粒子

図 12 マーカー粒子による  
流れの可視化